Ramsey-Zahlen

Harborth, Heiko

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 2001 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.47-48

J. Cramer Verlag, Braunschweig

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

Ramsey-Zahlen

Braunschweig, 9. 2. 2001*

Als Ramsey-Zahl $r = r(G,H)$ wird die kleinste Zahl r bezeichnet, für die in jeder 2-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_r entweder ein Graph G mit allen Kanten der ersten Farbe oder ein Graph H mit allen Kanten der zweiten Farbe vorkommt. Bei den klassischen Ramsey-Zahlen sind $G = K_a$ und $G = K_b$ jeweils auch vollständige Graphen.

Zwei Aspekte sind von Interesse: Einmal die Frage nach der Existenz von $r(G,H)$ und dann die „Jagd“ auf exakte Zahlen. Ein allgemeiner Existenzbeweis wurde schon von F.P. RAMSEY (1903 - 1930) gegeben. Unabhängig von RAMSEY haben 1935 P. ERDÖS und G. SZEKERES die Ramsey-Zahlen im Zusammenhang mit dem folgenden geometrischen Problem entdeckt. Es existiert eine kleinste Zahl $f(k)$ so, daß es unter mindestens $f(k)$ Punkten in der Ebene immer k gibt, die Eckpunkte eines konvexen k-Ecks sind. Die einzigen bekannten Werte sind bis heute $f(3)=3$, $f(4)=5$ und $f(5)=9$. Durch weitere Arbeiten von P. ERDÖS und R. RADO und später durch die Möglichkeiten der Computer hat sich die Ramsey Theorie in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts enorm entwickelt.

Im Falle von $r(K_a, K_b)$ sind nur für $a = 3$ die Werte 6, 9, 14, 18, 23, 28 und 36 für b von 3 bis 9 und für $a = 4$ die Werte 18 und 25 für $b = 4$ und 5 bekannt.

Werden für G und H andere als vollständige Graphen gewählt, so spricht man von verallgemeinerten Ramsey-Zahlen. Für G und H mit bis zu fünf Knoten sind fast alle Ramsey-Zahlen bekannt. Als weitere Beispiele sind etwa $r(K_{3,3}, K_{3,3}) = 18$, $r(K_5\text{-}e, K_5\text{-}e) = 22$ und $r(K_{2,n}, K_{2,n}) = 4n\text{-}2$, falls $4n\text{-}3$ eine Primzahlpotenz ist, hier bei uns bewiesen worden.

Die folgenden Variationen von Ramsey-Zahlen werden mit zum Teil eigenen Ergebnissen vorgestellt.

1. **Mehr als zwei Farben**: $r = r(G_1, ..., G_t)$ ist die kleinste Zahl r, so daß jede t-Färbung von K_r für ein i einen einfarbigen G_i der i-ten Farbe enthält. Beispiel: $r(K_3, K_3, K_3) = 17$.

2. **Mengen von Graphen**: $r = r_x(a)$ ist die kleinste Zahl r, so daß jede 2-Färbung von K_r einen einfarbigen Graphen mit a Knoten und x Kanten enthält. Beispiel: $r_8(5) = 14$.

3. **Konvexe Ramsey-Zahlen**: $r = r_c(G)$ ist die kleinste Zahl r, so daß in jeder 2-Färbung der Diagonalen und Seiten eines konvexen r-Ecks eine einfarbige Teilfigur G vorkommt. Beispiel: $r_c(C_4) = 14$ für ein konvexes Viereck C_4.

---

* Kurzfassung eines Vortrags, gehalten in der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

4. **„Weak“ Ramsey-Zahlen**: $r = r_{s,t}$(G) ist die kleinste Zahl r, so daß jede t-Färbung des K_r einen Graphen G mit höchstens s Farben enthält. Beispiel: $r_{2,3}(K_4) = 10$.

5. **„Zero-sum“ Ramsey-Zahlen**: $r = r(G; Z_k)$ ist die kleinste Zahl r, so daß bei jeder Zuordnung der Zahlen aus $Z_k = (0, 1, ..., k\text{-}1)$ zu den Kanten des K_r ein Graph G vorkommt, dessen Summe aller Kantenwerte Null ergibt. Beispiel: $r(K_3; Z_3) = 11$.

6. **Andere Gastgraphen**: An Stelle der Kanten von vollständigen Graphen werden die Kanten von anderen Folgen von Graphen gefärbt, und es wird dann nach kleinsten Graphen in der Folge gefragt, so daß jede 2-Färbung einen einfarbigen vorgegebenen Teilgraphen enthält. Beispiele: Vollständige bipartite Graphen oder d-dimensionale Würfelgraphen Q_d. So ist uns bei r_q(G) für Teilgraphen G mit bis zu sechs Knoten nur noch unbekannt, welches die kleinste Zahl $r = r_q(C_6)$ ist, so daß jede 2-Färbung der Kanten des Q_r einen einfarbigen Kreis C_6 mit 6 Knoten enthält. Der Wert von $r_q(C_6)$ ist mindestens 7 und höchstens 17.

Prof. Dr. Heiko Harborth · Bienroder Weg 47
D-38106 Braunschweig · e-mail: h.harborth@tu-bs.de